19/11/19

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Θεωρούμε τ.π που αποτελείται από μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli

① Θεωρούμε τ.π που αποτελείται από μια ακολουθία επαναλήψεων μιας στοιχειώδους διαδικασίας ② Σε κάθε επανάληψη υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα η Ε και η $A(=E^c)$

Ενδιαφέρον: Πλήθος των επαναλήψεων μέχρι την 1η Ε

π.χ η κλήρωση

Έστω Χ το πλήθος των επαναλήψεων (δοκιμών) μέχρι την 1η Ε.

Η Χ είναι τ.μ (διακριτή) με τιμές $x = 1, 2, 3, \ldots$

θεωρητικά ως το άπειρο

Αναζητώ τη σ.π της τ.μ Χ

$$\boxed{P_X(x)} \overset{\text{ορ.}}{=} P(X=x) = P\begin{pmatrix}\text{να χρειαστούμε } x \\ \text{επαναλήψεις μέχρι} \\ \text{την 1η Ε}\end{pmatrix}$$

Την x-οστή φορά που ήρθε η Ε

$$= P(\underbrace{AA\ldots A}_{x-1 \text{ φορές}}E) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \underbrace{P(A)\cdot P(A)\ldots P(A)}_{x-1 \text{ φορές}}\,P(E)$$

$$\overset{④}{=} (P(A))^{x-1}\cdot P(E) = (1-p)^{x-1}\cdot p = \boxed{q^{x-1}p}$$

③ Οι επαναλήψεις είναι ανεξάρτητες

④ Η P(E) παραμένει αμετάβλητη από επανάληψη σε επανάληψη και ίση με p $(0<p<1)$. Οπότε $P(A)$ αμετάβλητη και ίση με $1-p=q$ $(0<q<1)$

SKAG

Άρα, $\boxed{P_X(x) = q^{x-1}p = (1-p)^{x-1} \cdot p}$, $x=1,2,\ldots$

Είναι η P_X σ.π?

Ναι γιατί 1) $P_X(x) \geq 0$, $\forall x = 1,2,\ldots$ και 2) $\sum_{x=1}^{\infty} P_X(x) = 1$

Απόδειξη του 2)

$$\sum_{x=1}^{\infty} P_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = p \sum_{\nu=0}^{\infty} (1-p)^{\nu} = p \frac{1}{\cancel{1}-\cancel{1}+p} = \boxed{1}$$

Άθροισμα άπειρων όρων φθιν. γεωμ. προόδου

Αν $|a|<1$ τότε $\boxed{\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{\nu} = \frac{1}{1-a}}$

$(-1<a<1)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ. Χ λέγεται γεωμετρική με παράμετρο p $(0<p<1)$ αν οι ~~διακριτές~~ δυνατές τιμές της Χ είναι $x=1,2,\ldots$ και η σ.π. της Χ δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{P_X(x) = q^{x-1} \cdot p} \, , \; q = 1-p \; , \; x = 1,2,\ldots$$

Συμβολισμός $\boxed{X \sim Geo(p)}$

SKAG

Σε κάθε πρόβλημα που μπορεί να θεωρηθεί ως ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή $P(E)=p$.

Π.χ.

Τέλειο ζάρι ρίχνεται συνεχώς. Ποια η πιθανότητα το πρώτο ⚅

i) Να εμφανιστεί στην 6η ρίψη

ii) -"- μετά την 6η ρίψη.

ΛΥΣΗ

Έστω $E = \begin{Bmatrix} \text{να έρθει ⚅ σε} \\ \text{οποιαδήποτε ρίψη} \end{Bmatrix}$

Έστω X πλήθος των ρίψεων μέχρι την 1η E
(δηλ. μέχρι να έρθει για πρώτη φορά ⚅)

Τότε: $X \sim Geo\left(p = P(E) = \frac{1}{6}\right)$

i) $P\begin{pmatrix} \text{να εμφανιστεί ⚅} \\ \text{στην 6η ρίψη} \end{pmatrix} = P(X=6) = P_X(6)$

$= q^{6-1}p = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6}$

ii) $P\begin{pmatrix} \text{Το πρώτο ⚅ μετά} \\ \text{την 6η ρίψη} \end{pmatrix} = P(X > 6)$

$1 - P(X \le 6) = 1 -$

$1 - P(X \le 6) = 1 - \sum_{x=1}^{6} P_X(x) = 1 - \sum_{x=1}^{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \frac{1}{6} = \ldots$

$\sum_{x=7}^{\infty} P_X(x) = \sum_{x=7}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \sum_{x=7} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$

$= \frac{1}{6} \sum_{x=7}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-7} = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^6 \sum_{x=7}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{x-7} =$

Επειδή θέλω ν=0

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^6 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^\nu = \boxed{\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^6 \frac{1}{1-\frac{5}{6}}}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Ιδιότητα Αμνησίας Γεωμετρικής)

Έστω μ $X \sim Geo(p)$ και $m, n = 1, 2, \dots$

Τότε

$$\boxed{P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$P(X > m+n \mid X > m) = \frac{P(X > m+n \text{ κ' } X > m)}{P(X > m)} = \frac{P(X > m+n)}{P(X > m)} = \dots$$

$$= \dots$$

Π.χ

Η πιθανότητα να πετύχει τον στόχο κάθε φορά που προσπαθεί 0,1

$$P\left(\begin{array}{l}\text{να πετύχει το στόχο μετά}\\ \text{από 5 προσπάθειες αν έχει}\\ \text{ήδη προσπαθήσει ανεπιτυχώς}\\ \text{περισσότερο από 3 φορές}\end{array}\right) = P(X > 5 \mid X > 3) = \frac{P(X > 5 \text{ κ' } X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X > 5)}{P(X > 3)} = \frac{1 - P(X \le 5)}{1 - P(X \le 3)}$$

$$\| \quad P(X > 3+2 \mid X > 3) \overset{\text{αμνησία}}{=} \dots$$

$$\frac{\sum_{x=}^{\infty}}{\sum_{x=0}^{\infty}}$$

Έστω $E = \{\text{να πετύχει το στόχο}\}$, $p = P(E) = 0{,}1$

Έστω X το πλήθος των στοχεύσεων μέχρι την 1η E (μέχρι να πετύχει το στόχο για 1η φορά)

ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ
Ή
ΚΑΤΑΝΟΜΗ PASCAL

Όμοιω με Γεωμετρική

Ενδιαφέρον: Πλήθος των επαναλήψεων μέχρι την Κ Επιτυχία ($k=1,2,\dots$)

Έστω X το πλήθος των επαναλήψεων (δοκιμών) μέχρι την Κ Ε ($k=1,2,\dots$)

Η X είναι μια διακριτή τ.μ με τιμή $x=k, k+1, \dots$

Ζητώ $P_X(x) \overset{op}{=} P(X=x) = P\begin{pmatrix} \text{Η κ επιτυχία (Ε)} \\ \text{εμφανίζεται στην} \\ \text{x- επανάληψη} \end{pmatrix}$

$= P\begin{pmatrix} \text{Στις x-1 επαναλήψεις} \\ \text{έχω k-1E και στην} \\ \text{x επανάληψη έχω } k\text{ E} \end{pmatrix} = P\left(\underbrace{EAE\dots A}_{\substack{k-1\,E \text{ και} \\ x-k\,A}}\overset{\substack{k\text{-οστή } E \\ \uparrow}}{E} \text{ ή } \underbrace{EEA\dots A}_{\substack{k-1\,E \text{ κ'} \\ x-k\,A}}E \text{ ή } \dots\right)$

$= P(EAE\dots AE) + P(EEA\dots AE) + \dots$

$= P(\underbrace{EAE\dots A}_{\substack{k-1\,E \\ \text{και} \\ x-k\,A}}E) \cdot \binom{x-1}{k-1 \;\; x-k}$

$\overset{?}{=} \binom{x-1}{k-1 \;\; x-k} = \binom{x-1}{k-1} \cdot P(EAE\dots AE)$

SKAG

③ $\binom{x-1}{k-1} P(E)\cdot P(A)\cdot P(E)\ldots P(A)P(E)$

④ $\binom{x-1}{k-1} p^{k}\cdot(1-p)^{x-k} = \binom{x-1}{k-1} p^{k}\cdot q^{x-k}$, $x=k,k+1,\ldots$

Συμπερασματικά $\boxed{P_X(x)=\binom{x-1}{k-1}\cdot p^{k}\cdot q^{x-k}}$, $x=k,k+1,\ldots$

Αποδεικνύεται ότι η P_X είναι σ.π αφού 1) $P_X(x)>0$ $\forall x$ και 2) $\sum_{x=k}^{\infty} P_X(x)=1$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ Χ λέγεται αρνητική διωνυμική με παραμέτρους k και p ($k=1,2,\ldots$, $0<p<1$) αν το σύνολο τιμών της τ.μ Χ είναι $x=k,k+1,\ldots$ και η σ.π της Χ

$$P_X(x)=\binom{x-1}{k-1}p^{k}\cdot(1-p)^{x-k}=\binom{x-1}{k-1}p^{k}\cdot q^{x-k}, \quad q=1-p, \quad x=k,k+1,\ldots$$

Συμβολισμός $X\sim NB(k,p)$

Εφαρμογές: Εφαρμόζεται σε κάθε πρόβλημα που μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή $p=P(E)$ και το ενδιαφέρον είναι στο πλήθος των δοκιμών μέχρι την k-επιτυχία

Πχ

Ζάρι ρίχνεται συνεχώς. P(η τέταρτη εμφάνιση άρτιου να έρθει στην 10η ρίψη)

Έστω E={αποτελ. άρτιος σε οποιαδ. ρίψη}

Έστω X πλήθος των ρίψεων μέχρι την 4η E (δηλ. μέχρι να εμφανιστεί για 4η φορά άρτιος)

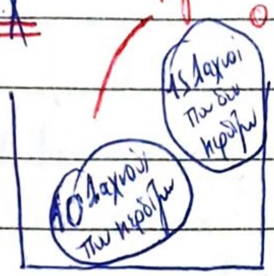
$$X \sim NB\left(k=4,\ p=P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\right)$$

$$P_X(x)=\binom{x-1}{4-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} \quad x=4,5,6,\dots$$

$$= P(X=10)=P_X(10)=\binom{10-1}{4-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}=\dots$$

Π.Χ

$Hg(10,15,1)$



$$\frac{\binom{10}{1}\binom{15}{0}}{\binom{25}{1}}$$

(με επανάθεση προφανώς)

α) Αν γίνουν τρεις κληρώσεις

$$P\left(\begin{array}{c}\text{ακριβώς μία να περιέχει}\\ \text{ταξίδι}\end{array}\right)=P(X=1)=P_X(1)=\binom{3}{1}0{,}4^{1}\,0{,}6^{3-1}=\dots$$

β) $$P\left(\begin{array}{c}\text{να χρειαστεί να γίνουν}\\ \text{4 κληρώσεις μέχρι να}\\ \text{εμφανιστεί η 1η που}\\ \text{θα περιέχει ταξίδι}\end{array}\right)=P(Y=4)=P_Y(4)=0{,}6^{4-1}\cdot 0{,}4=\dots$$

γ) $$P\left(\begin{array}{c}\text{Το 3ο ταξίδι να κληρωθεί}\\ \text{στην έκτη κλήρωση}\end{array}\right)=P(Z=6)=P_Z(6)=\binom{6-1}{3-1}0{,}4^{3}\,0{,}6^{6-3}$$

$$=\dots$$

Εστω $E = \{$να κληρωθεί ταξίδι$\}$

α) Εστω X πλήθος των E στις $n=3$ επαναλήψεις κληρώσεις

Το $X \sim B(n=3, p=P(E))$ όπου $p = \frac{10}{25} = 0{,}4$

Άρα, $P_X(x) = \binom{3}{x} \cdot 0{,}4^x \cdot 0{,}6^{3-x}$, $x = 0, 1, 2, 3$

β) Εστω Y τ.μ παριστά το πλήθος των κληρώσεων μέχρι την 1η E

Το $Y \sim Geo(p = P(E) = 0{,}4)$ Άρα, $\boxed{P_Y(y) = 0{,}6^{y-1} \cdot 0{,}4}$, $y = 1, 2, \ldots$

γ) Εστω τ.μ Z παριστά πλήθος κληρώσεων μέχρι την 3η E

Το $Z \sim NB(k=3, p=P(E)=0{,}4)$, $P_Z(z) = \binom{z-1}{3-1} 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^{x-3}$

$x = 3, 4, \ldots$

ΚΑΤΑΝΟΜΗ POISSON

Ιστορικά: Προέκυψε ως προς το όριο της διωνυμικής κατανομής

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω η τ.μ $X \sim B(n, P_n)$ με $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ και $\lim_{n\to\infty} (n P_n) = \lambda > 0$

Τότε

$$\lim_{n\to\infty} P_X(x) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} P_n^x (1-P_n)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad \forall x = 0, 1, \ldots, n$$

SKAG

Αποδ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{x=0}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\\ &e^x = \sum_{v=0}^{\infty}\frac{x^v}{v!}\end{aligned}\right\} = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τ.μ X λέγεται Poisson με παράμετρο λ $(\lambda>0)$ αν οι τιμές της X είναι $x=0,1,\ldots$ και η σ.π

$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots$$

Συμβολικά $X \sim P(\lambda)$